1. MODELO MATEMÁTICO

Un modelo matemático muy exacto implica un desarrollo matemático muy complejo. Por el contrario, un modelo matemático poco fino nos deparará un desarrollo matemático simple.

El modelo matemático tiende a ser lo más simple posible, con una representación lo más cercana posible a la realidad.

A la hora de desarrollar un modelo matemático:

1. Se tiende a trabajar con el más simple
2. Se toma como variable la de más peso

Si tenemos un modelo matemático definido por un sistema, conociendo la entrada [r(t)], sabemos automáticamente la salida [c(t)].

$$\frac{c(t)}{r(t)} = M_m(t)$$

1.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA $\frac{c(t)}{r(t)}$

Las señales de entrada y salida pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales lineales cuya expresión general es:

$$a_0 \frac{d^n r}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + ... + a_n r = b_0 \frac{d^m c}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} c}{dt^{m-1}} + ... + b_m c$$

Representando la función derivada por el operador $p = \frac{d}{dt}$ tenemos que:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)r = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m)c$$

y de aquí:

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m} = G(t)$$

Esta relación entre las expresiones función del tiempo de las señales de salida y de entrada recibe el nombre de *transmitancia o* ***función de transferencia***.

Las ecuaciones diferenciales de las funciones de entrada y salida de un sistema son relativamente complejas y difíciles de analizar. A menudo se emplea una herramienta matemática para resolverlas de forma mucho más cómoda y que es la denominada *Transformada de Laplace.*

La transformada de Laplace es una función y(t) que se define como:

$$\ell[y(t)] = Y(s) = \int_{0^+}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

en la que s es un número complejo $s = \sigma + j\omega$. La transformada de una variable dependiente *y* se escribe Y(s) con Y en mayúscula y s adicionada para recordar que la variable *y* ha sido transformada.

Las propiedades de la transformada de Laplace son las siguientes:

- Linealidad: $\ell(y_1 + y_2) = \ell(y_1) + \ell(y_2)$
- Permutabilidad: $\ell[Kf(t)] = K\ell[f(t)]$
- Derivada: $\ell[y'(t)] = sY(s) - y(0^+)$

En definitiva, la transformada de Laplace convierte la operación de integrar en una división por la nueva variable s y la operación de derivar en una multiplicación, es decir, reduce las operaciones analíticas de integrar y derivar a operaciones algebraicas efectuadas sobre las transformadas.

En la tabla siguiente pueden verse los pares de transformadas de Laplace más habituales:

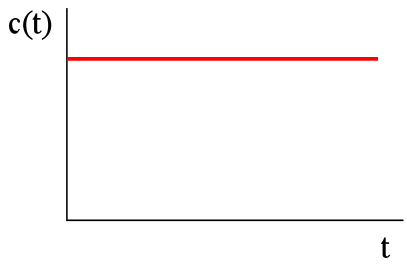
Función del tiempo: f(t)	**Función de Laplace: F(s)**
Impulso unidad	1
Valor constante unidad o bien función salto unitaria	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$sen\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi\right)$ $\phi = \cos^{-1}\zeta$	$\frac{1}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}$
$e^{-at} sen\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}.e^{-\varepsilon\omega_n}} sen\,\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}$

2. Señales de Prueba

Entre las señales de prueba más típica podemos distinguir:

2.1. Entrada en Escalón Unitario

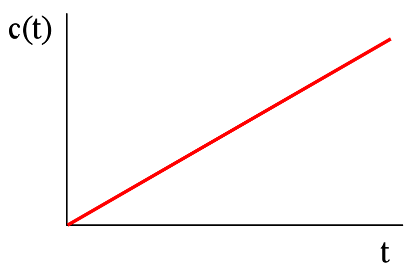


$t = 0 \Rightarrow c(t) = 0$

$t > 0 \Rightarrow c(t) = 1$

Laplaciana: $\frac{1}{s}$

2.2. Entrada en Rampa Unitaria



$c(t) = mt$

$m = pdte. = 1 \Rightarrow c(t) = t$

Laplaciana: $\frac{1}{s^2}$

2.3. Entrada en Impulso Unitario

$t = 0 \Rightarrow c(t) = 1$

$t \neq 0 \Rightarrow c(t) = 0$

Laplaciana: 1

Estudiemos un sistema de segundo orden:

$$\frac{1}{Ms^2 + Rs + K} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{Rs}{M} + \frac{K}{M}} = \frac{K/M}{K\left(s^2 + \frac{RS}{M} + \frac{K}{M}\right)}$$

Y como:

$$\omega_n^{\ 2} = \frac{K}{M} \quad ; \quad \frac{R}{M} = 2\varepsilon\omega_n \Rightarrow 2\varepsilon\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{R}{M} \Rightarrow \varepsilon = \frac{R/M}{2\sqrt{K/M}}$$

Obtenemos: $$\left(\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}\right)\frac{1}{K}$$

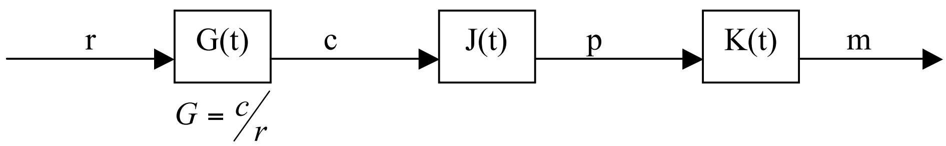
Y mediante transformadas de Laplace llegamos a:

$$\frac{-1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}.e^{-\varepsilon\omega_n}} sen\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

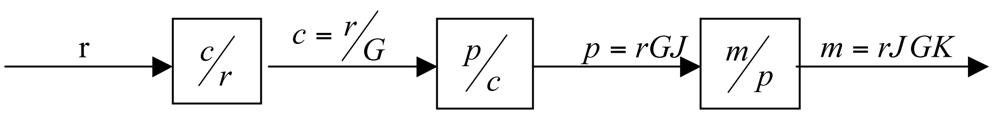
Los coeficientes ε y ω_n son constantes. El coeficiente ε es el cociente entre dos amplitudes consecutivas en un sistema de segundo orden y nos da información sobre la amortiguación de la excitación del sistema. El coeficiente ω_n es la frecuencia de excitación, esto es, la frecuencia mínima a la que se excita el sistema.

3. Diagramas de Bloques

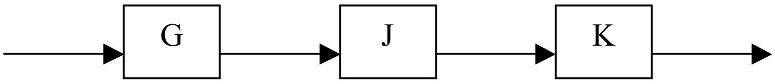
A continuación, y mediante diagramas de bloques, vamos a calcular la función de transferencia equivalente para algunos sistemas:



Nuestro objetivo es calcular m/r, es decir, la función de transferencia del sistema total:

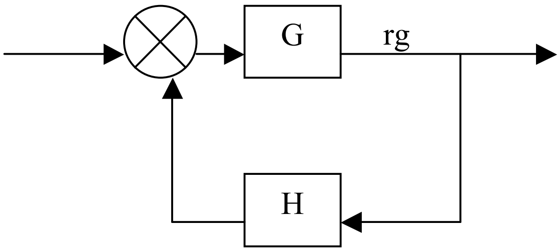


Si seguimos operando tenemos que $\frac{m}{r} = GJK$, y entonces:



equivale a:

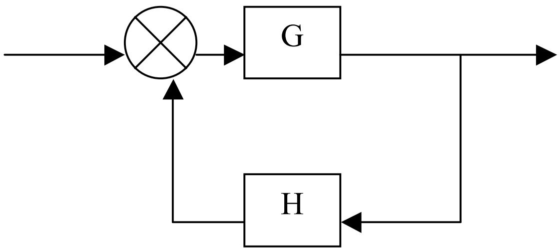
Estudiemos a continuación el siguiente sistema:



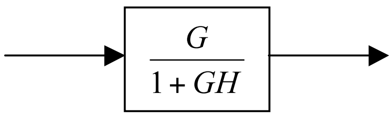
$$c = rG - cGH$$

$$c + cGH = rG \Rightarrow c(1 + GH) = rG \Rightarrow \frac{c}{r} = \frac{G}{1 + GH}$$

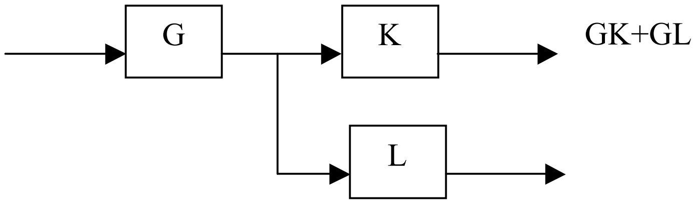
Es decir:



equivale a:



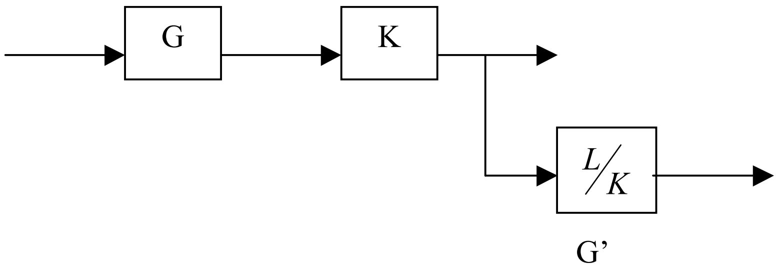
Otro sistema podría ser el siguiente:



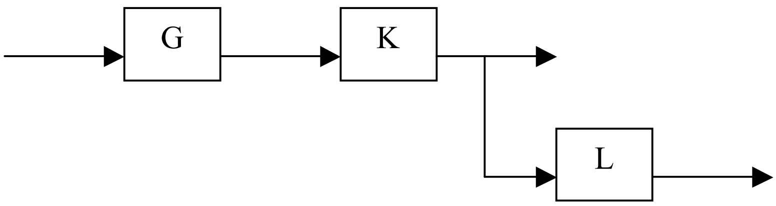
$$GK + G'GK = GK + GL$$

$$G'GK = GL \Rightarrow G'K = L \Rightarrow G' = \frac{L}{K}$$

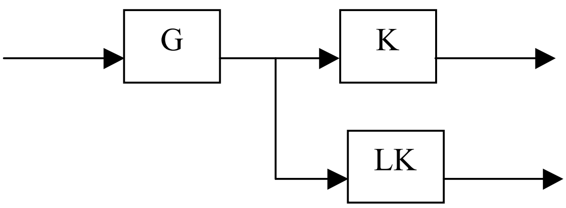
que es equivalente a:



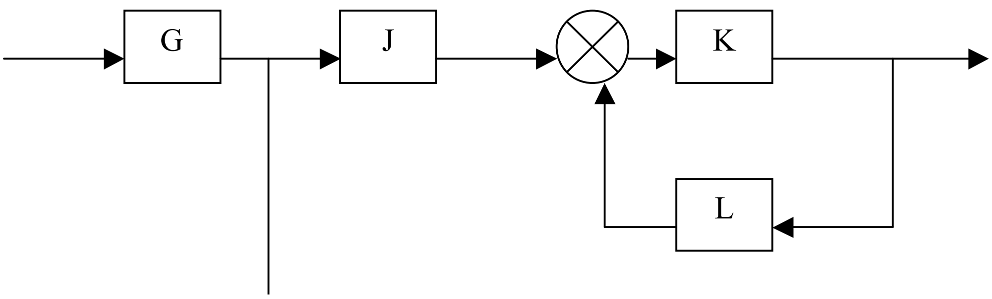
Y a la inversa:



equivale a:



Veamos un ejemplo combinando los anteriores diagramas de bloques:



En total tendríamos que la función de transferencia equivalente es:

$$\frac{GJK}{1+KL}+GH$$

Si adelantásemos H hasta pasar J, tendríamos que la función de transferencia equivalente es:

$$\frac{GJK}{1+KL}+GJM'$$

Entonces:

$$\frac{GJK}{1+KL}+GJM'=\frac{GJK}{1+KL}+GM \Rightarrow M'J=M \Rightarrow M'=\frac{M}{J}$$

4. Estabilidad

El límite de estabilidad de un bucle de control formado por el proceso y el controlador viene dado por una vibración automantenida en la cual el bucle de control responde, ante cualquier perturbación con una oscilación estable, sin que estas oscilaciones varíen de amplitud.

La condición crítica para que se produzca esta oscilación continua es que la respuesta frecuencial del bucle de control en el diagrama de Bode, sea tal que la ganancia total en dB sea cero y el desfase sea de 180º.

No obstante, el criterio anterior define sólo la estabilidad absoluta sin indicar cuál es el grado de estabilidad. Sabemos que el bucle de control está optimizado cuando ante una perturbación, el sistema responde con una curva de amortiguación con razón ¼, es decir, que las amplitudes decrecen con esta relación.

Esta curva se obtiene si, en el diagrama de Bode, la curva de ganancia total cruza la línea de 0 dB para el valor de –140º del desfase, y es inferior en 5 dB para el valor de –180º del desfase. Por lo tanto, el proceso será estable si las curvas de ganancia y de desfase son inferiores a estos valores. Es decir, el margen de ganancia no debe ser menor de 5 dB y el margen de fase no debe ser menor de 40º. Sin embargo, también pueden admitirse márgenes de ganancia entre 6 a 20 dB y márgenes de fase entre 25º y 60º.

Un sistema se dice que es estable cuando su respuesta en tiempos finitos son también finitas.

Un sistema controlado es aquél en que la salida coincide salvo un cierto error con la entrada. La entrada es la salida deseada si el sistema es controlado.

Sistema estable: $\lim\limits_{t\to\infty}\left[r(t)-c(t)\right]=\frac{1}{s}-\left(\frac{1}{s}-\frac{T}{1+Ts}\right)=1-\left(1-e^{-\infty/T}\right)=1-(1-0)=0$

4.1. Criterio de Routh

Si tenemos una función de transferencia en s tal que:

$$F.T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

siendo N(s) y D(s) polinomios, la función polinómica del denominador D(s) es la que nos va a marcar la estabilidad o inestabilidad de un sistema.

Si tenemos que

$$\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at}$$

las raíces del polinomio del denominador me van a marcar la estabilidad o inestabilidad del sistema.

Si tenemos en el denominador un polinomio de grado n

ansn + an-1sn-1 +....+ a1s + a0

se puede transformar en: $(s-r_1)(s-r_2)....(s-r_n)$, donde r_i son las raíces del polinomio. De estas raíces se estudian las positivas, que son las que no desestabilizan el sistema.

Routh desarrolló un método, basado en una matriz, para determinar las raíces negativas de un sistema sin tener que resolver una ecuación de grado n.

$$\left(\frac{1}{s+a}\right) \approx e^{-at} \Rightarrow raíces < 0 \Rightarrow \text{Sistema estable}$$

Si el sistema presentase una sola raíz positiva, el sistema sería inestable.

Para un sistema dado por

$$\frac{N(s)}{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + ... + a_m}$$

Routh propone una matriz en la que las dos primeras filas quedan conformadas como sigue:

a_0	a_2	a_4	....
a_1	a_3	a_5	....

A continuación se procede a calcular los términos de las siguientes filas tal y como sigue:

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} \qquad b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} \qquad b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

Quedando así la matriz:

a_0	a_2	a_4	....
a_1	a_3	a_5	....
b_1	b_2	b_3	....
c_1	c_2	....	.....

Cuando todos los términos que componen la matriz (a_n, b_n, c_n...) existen y son mayores que cero, entonces el sistema es estable. Basta con que uno de los coeficientes de la matriz tenga signo negativo para que el sistema sea inestable.

Si aparece algún cero en la matriz de Routh, ponemos en el lugar del cero una letra ε y continuamos con las operaciones.

Si apareciese una fila entera de ceros, derivaríamos dicha fila, colocando en la fila siguiente los coeficientes resultantes de la derivación.

El criterio de Routh nos permite multiplicar todos los componentes de una fila de la matriz por un mismo número.

El criterio de Routh es demostrable matemáticamente y dice que:

1. Si al montar la matriz de Routh todos los elementos de la primera columna son positivos, entonces el sistema es estable.
2. Si al montar la matriz de Routh hay algún elemento con signo negativo, el sistema no es estable.

Un criterio previo al de Routh es el siguiente: “En el denominador de la función de transferencia en el dominio s, todos los coeficientes del polinomio en s deben ser mayores que cero. Si alguno es igual a cero, es decir, si falta algún término en s (incluido el término independiente), entonces no hay estabilidad en el sistema al que representa esa función de transferencia. Igualmente, si algún coeficiente es menor que cero, el sistema será inestable”.

- Ejemplo:

Sea un sistema dado por

$$\frac{1}{s^5 + 3s^4 + s^2 + 2s + 1}$$

Estudia su estabilidad usando el criterio de Routh.

De la ecuación del sistema, obtenemos las dos primeras filas de la matriz de Routh:

1	2	2
3	1	1

Seguidamente calculamos los términos b_n:

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3} \quad ; \quad b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3}$$

Con lo que la matriz de Routh queda así (terminamos con ceros la tercera fila):

1	2	2
3	1	1
5/3	5/3	0

Que podemos expresar como sigue, multiplicando la tercera fila por 3:

1	2	2
3	1	1
5	5	0

A continuación calculamos los términos c_n:

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{10}{5} = -2 \quad ; \quad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Quedando como sigue la matriz de Routh:

1	2	2
3	1	1
5	5	0
-2	1	0

Por último, calculamos el término d_1:

$$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{15}{2}$$

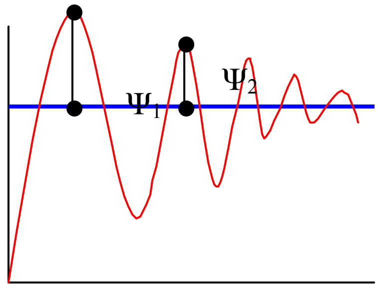
para completar la matriz de Routh:

1	2	2
3	1	1
5	5	0
-2	1	0
15/2	0	0

A la vista de la matriz de Routh, podemos afirmar que el sistema es INESTABLE, ya que se observa al menos un cambio de signo en la primera columna de la matriz.

5. Sistemas de Segundo Orden

Vamos a estudiar a continuación la respuesta de un sistema de segundo orden frente a una entrada en escalón.



$$\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

ω_n es la frecuencia a la cual se excita el sistema (nivel de energía de excitación o frecuencia de corte).

$\varepsilon = \dfrac{\Psi_2}{\Psi_1}$ recibe el nombre de amortiguamiento.

Si sometemos a un sistema de segundo orden a una entrada en escalón, tendremos que la función de transferencia es:

$$G = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

De donde:

$$G = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{s}\omega_n^{\ 2}\frac{1}{(s-a)}\frac{1}{(s-b)} \Rightarrow s = \frac{-2\varepsilon\omega_n \pm \sqrt{(2\varepsilon\omega_n)^2 - 4\omega_n^{\ 2}}}{2} \Rightarrow$$

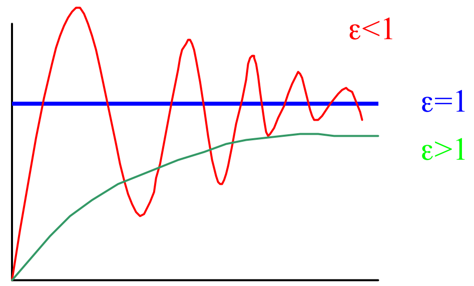
$$\Rightarrow s = \frac{-2\varepsilon\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2}$$

Por lo tanto:

- Si $\varepsilon>1 \Rightarrow s_1=a; s_2=b$ (dos raíces reales positivas)

- Si $\varepsilon=1 \Rightarrow -\varepsilon\omega_n$ (doble raíz real)

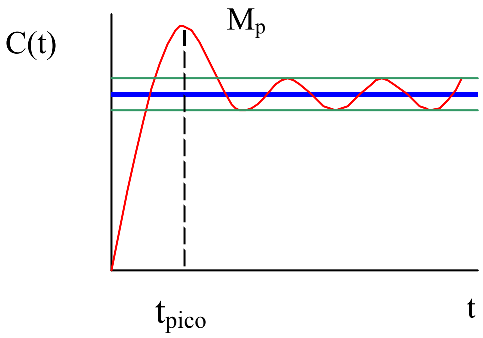
- Si $\varepsilon<1 \Rightarrow$ dos raíces complejas



$$\varepsilon = \frac{\Psi_2}{\Psi_1}$$

Si $\varepsilon>1$ tenemos un sistema sobreamortiguado, mientras que cuando $\varepsilon<1$ se trata de un sistema subamortiguado y cuando $\varepsilon=1$ de un sistema críticamente amortiguado.

Veamos ahora un sistema oscilante de segundo orden.



El *tiempo de pico* (t_p) es el tiempo que tarda en darse la oscilación más grande.

El *máximo sobreimpulso* (M_p) viene dado por la diferencia entre el valor real máximo de entrada y el valor de entrada solicitado, esto es: $M_p = c_{real \cdot máximo} - c_{solicitado}$

Este máximo sobreimpulso viene dado por:

$$M_p = e^{-\pi\left(\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}$$

Conviene definir otros valores, como son:

- *Tiempo de retardo* (t_r): Es el tiempo que se tarda en llegar a la mitad del valor de la señal.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad ; \quad \beta = arctg\,\frac{\omega_d}{\varepsilon\omega_n}$$

- *Tiempo de pico* (t_{pico}): Tiempo que tarda en darse su máximo sobreimpulso.

$$t_{pico} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

- *Frecuencia amortiguadora* (ω_d): Frecuencia de corte

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

- *Tiempo de establecimiento* (t_s): Tiempo que la señal tarda en establecerse para llegar a un cierto intervalo de comportamiento. Se puede calcular mediante dos criterios: el criterio del 2% y el criterio del 5%:

  - Criterio del 2%: $t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\varepsilon\omega_n}$

  - Criterio del 5%: $t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\varepsilon\omega_n}$